Bab 3

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

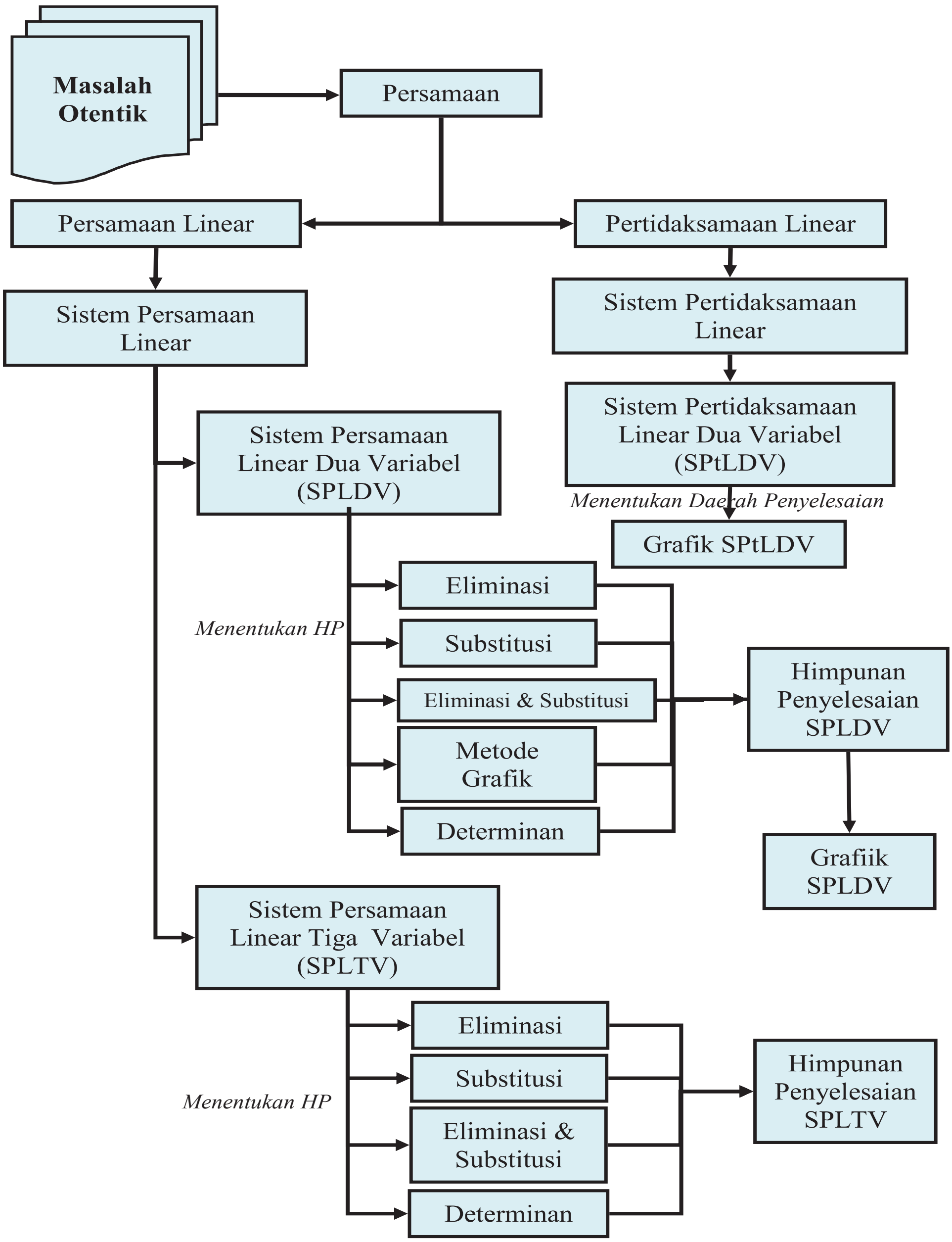
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu: 1. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami konsep sistem persamaan linear dua dan tiga variabel serta pertidaksamaan linear dua variabel dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam penyelesaian masalah matematika; 3. menggunakan SPLDV, SPLTV dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan; 4. Membuat model matematika berupa SPLDV, SPLTV, dan SPtLDV dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya; 5. membuat model matematika berupa persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel yang melibatkan nilai mutlak dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya.	Melalui pembelajaran materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPLDV atau SPLDV; • merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLDV atau SPLDV; • menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan; • menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan; • menemukan ciri-ciri SPLDV atau SPLDV dari model matematika; • menuliskan konsep SPLDV atau SPLDV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.

Istilah Penting

- *SPL*
- *SPLDV*
- *SPLTV*
- *Himpunan Penyelesaian*
- *Grafik Persamaan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

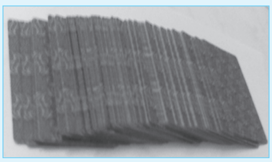
1. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Dua Variabel

Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari saat duduk di kelas VIII SMP. Pada saat ini kita perdalam kajian, pemahaman dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah miliki sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini, kamu berupaya menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaan kepada guru dan teman kelompok.

Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu dengan fakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear. Permasalahan-permasalahan tersebut kita jadikan bahan inspirasi dan menyusun model-model Matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Model matematika tersebut, kita jadikan bahan abstraksi untuk membangun konsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear dua variabel.

Cermatilah masalah berikut!

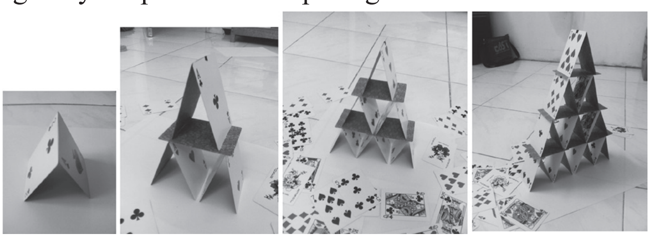
Masalah-3.1



Kartu bergambar dapat dijadikan bahan inspirasi menemukan konsep dan aturan yang terkait dengan sistem persamaan linear melalui masalah yang dirancang.

Gambar 3.1 Kartu Bergambar

Anto bermain kartu bergambar bersama temannya. Ketika mereka selesai bermain, Budi, adiknya Anto mengumpulkan kartu-kartu tersebut. Kemudian Ia asyik membangun rumah bertingkat yang diberi nama **Rumah Kartu**. Susunan kartu untuk setiap tingkatnya dapat dicermati pada gambar berikut.



Rumah Kartu 1 Tingkat | Rumah Kartu 2 Tingkat | Rumah Kartu 3 Tingkat | Rumah Kartu 4 Tingkat

Gambar 3.2 Rumah Kartu Bertingkat

Setelah Budi menyusun beberapa rumah kartu bertingkat, ia bertanya dalam pikirannya, bagaimana hubungan di antara banyak kartu dan banyak tingkat rumah. Berapa banyak kartu yang dibutuhkan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat? Dapatkah kamu membantu Budi untuk menyelesaikan masalah tersebut?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apakah tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi? Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan. Selesaikanlah masalah di atas. Agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan dan pikirkan beberapa pertanyaan berikut:

1) informasi apa saja yang kamu temukan dalam masalah tersebut?
2) konsep apa saja yang terkait untuk menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu yang digunakan untuk setiap tingkatnya?
3) bagaimana strategi kamu menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu bergambar yang digunakan?
4) misalkan t menyatakan banyak tingkat rumah dan k banyak kartu yang dipakai untuk setiap tingkat. Dapatkah kamu rumuskan aturan yang memasangkan banyak tingkat rumah dengan banyak kartu bergambar yang digunakan?
5) adakah kesulitan yang harus didiskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antara t dan k?
6) apakah aturan pemasangan yang kamu rumuskan memenuhi situasi penyusunan kartu pada gambar di atas?
7) adakah sistem persamaan linear kamu temukan dari rumusan hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat?
8) dapatkah kamu menjawab permasalahan Budi? Berapa banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.
Rumah kartu bertingkat 1 mengunakan kartu sebanyak 2 buah.
Rumah kartu bertingkat 2 mengunakan kartu sebanyak 7 buah.
Rumah kartu bertingkat 3 mengunakan kartu sebanyak 15 buah.
Rumah kartu bertingkat 4 mengunakan kartu sebanyak 26 buah.

Sehingga banyak tingkat dan banyak kartu dapat dikorespondensikan satu-satu membentuk suatu relasi sama dengan atau banyak kartu dapat dinyatakan dalam banyak tingkat rumah.

Temukan aturan yang memasangkan banyak tingkat (t) dengan banyak kartu (k).

Banyak Tingkat Rumah (*t*)	Banyak Kartu (*k*)	Pola Banyak Kartu
1	2	1 + 1 + 0
2	7	4 + 2 + 1
3	15	9 + 3 + 3
4	26	16 + 4 + 6

Cermati pola, bahwa bilangan 1, 4, 9, 16 adalah kuadrat dari bilangan 1, 2, 3, 4 dan bilangan 1, 2, 3, 4 adalah banyaknya tingkat rumah. Apakah bilangan 0, 1, 3, dan 6 dapat dinyatakan dalam t^2 dan t?

Misal x dan y adalah bilangan yang akan ditentukan sekaitkan dengan banyak kartu dan banyak tingkat rumah yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$k = x\,t^2 + y\,t$ .... (Persamaan-a)

Cermati kembali Gambar 3.2! Untuk mendapatkan model matematika berupa dua persamaan linear dengan variabel x dan y yang saling terkait.

Untuk $t = 1$ dan $k = 2$ diperoleh persamaan $x + y = 2$

Untuk $t = 2$ dan $k = 7$ diperoleh persamaan $4x + 2y = 7$

Dengan demikian kita peroleh dua buah persamaan linear dua variabel, yaitu

$$\begin{cases} x + y = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ 4x + 2y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

Ingat Kembali!

Materi yang telah dipelajari sebelumnya di SMP, yaitu tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dua persamaan linear dengan berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik).

Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 4 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline 2y = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 2 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline -2x = -2 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

- Evaluasi hasil yang diperoleh, apakah hasil yang diperoleh adalah solusi terbaik.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k &= xt^2 + yt \\ 2 &= \frac{3}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(1) \text{ (pernyataan benar)} \\ 7 &= \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) \text{ (pernyataan benar)} \\ 15 &= \frac{3}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) \text{ (pernyataan benar)} \\ 26 &= \frac{3}{2}(4)^2 + \frac{1}{2}(4) \text{ (pernyataan benar)} \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan, aturan pengaitan banyak tingkat dengan banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu adalah $k = xt^2 + yt$ dengan nilai konstanta x dan y adalah $\frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{2}$.

- Tentukan banyak kartu yang digunakan membuat rumah kartu dengan 30 tingkat.

Untuk $t = 30$, diperoleh $k = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{3}{2}(30)^2 + \frac{1}{2}(30)$

$$k = \frac{3}{2}(900) + 15 = 1365$$

Jadi, banyak kartu yang dibutuhkan membangun rumah kartu bertingkat 30 adalah 1365 buah kartu.

Perhatikan masalah berikut yang dirancang pada sebuah rumah adat salah satu suku di Indonesia.

Masalah-3.2

Gambar 3.3 Rumah Adat

Atap rumah terbuat dari ijuk pohon aren (Nira). Perbandingan banyak ijuk yang digunakan untuk menutupi permukaan atap bagian bawah dengan permukaan atap bagian tengah adalah 7 : 4. Perbandingan tinggi permukaan atap bagian bawah dengan tinggi permukaan atap bagian tengah adalah 3 : 2. Coba tentukan berapa panjang alas penampang atap bagian bawah dan tengah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Perbandingan luas penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 7 : 4.

Perbandingan tinggi penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 3 : 2.

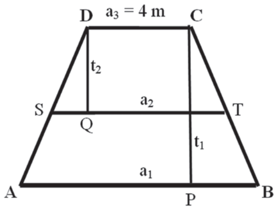
Ukuran garis puncak masing-masing atap adalah 4 m

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap bagian bawah

b. Panjang alas penampang atap bagian tengah

Perhatikan ilustrasi masalah seperti gambar berikut!



Perhatikan gambar di samping, konsep apa yang melekat pada penampang atap rumah adat tersebut.

Misalkan panjang $AB = a_1$, $ST = a_2$, dan $DC = a_3 = 4$ m

Misal: Luas penampang atap bawah ($ABCD$) = L_1

Luas penampang atap tengah ($STCD$) = L_2

Karena penampang atap rumah berbentuk trapesium, maka

$$L_1 = \frac{1}{2}(AB + DC) \times \text{tinggi}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_3) \times t_1$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(ST + DC) \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times (a_2 + a_3) \times t_2$$

Karena perbandingan banyak ijuk yang digunakan menutupi penampang atap bagian bawah dengan banyaknya ijuk yang digunakan menutupi atap bagian tengah adalah 7 : 4, dapat diartikan bahwa $L_1 : L_2 = 7 : 4$.

Petunjuk

Lakukan matematisasi dan manipulasi aljabar untuk mendapatkan model matematika berupa persamaan linier.

$$L_1 : L_2 = 7 : 4 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_3)t_1}{(a_2 + a_3)t_2} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 4 \text{ m dan } t_1 : t_2 = 3 : 2 \Rightarrow \frac{3\,(a_1 + 4)}{2\,(a_2 + 4)} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1 + 4)}{(a_2 + 4)} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow 6a_1 + 24 = 7a_2 + 28$$

$$\Rightarrow 6a_1 - 7a_2 = 4$$

$\therefore 6a_1 - 7a_2 = 4$ ....(Persamaan-1)

Ingat Kembali!

Syarat dua bangun datar dikatakan sebangun.

Cermati bahwa trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun.

$$PB = \frac{1}{2}(a_1 - a_3) \text{ dan } SQ = \frac{1}{2}(a_2 - a_3)$$

Karena trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun maka

$$\frac{PB}{SQ} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - 4}{a_2 - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 8 = 3a_2 - 12$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$\therefore 2a_1 - 3a_2 = -4$ ....(Persamaan-2)

Dengan demikian, kita telah memperoleh dua persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2 yang saling terkait, yaitu:

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 \text{..........(Persamaan-1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 \text{..........(Persamaan-2)} \end{cases}$$

Dari Persamaan-1 diperoleh

$6a_1 - 7a_2 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}$ ....(Persamaan-3)

Subtitusikan persamaan-3 ke persamaan-1, diperoleh

$$a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}\right) - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow \frac{14}{6}a_2 + \frac{8}{6} - \frac{18}{6}a_2 = -\frac{24}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{6}a_2 = \frac{-32}{6}$$

$$\Rightarrow a_2 = 8$$

$$a_2 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} = \frac{56}{6}\cancel{a_2} + \frac{4}{6} = \frac{60}{6}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10$$

Himpunan penyelesaian persamaan linear $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$.

Dengan demikian diperoleh panjang alas penampang atap bagian bawah $a_1 = 10$ m dan panjang alas penampang atap bagian tengah $a_2 = 8$ m.

Diskusi

Masih ingatkah kamu contoh sistem persamaan linear dua variabel ketika belajar di SMP. Perhatikan kembali setiap langkah penyelesaian Masalah-3.1 dan Masalah-3.2.

- Coba temukan contoh sistem persamaan linear dari setiap permasalahan yang merupakan sistem persamaan linear dua variabel.
- Temukan ciri-ciri sistem persamaan linear tersebut dan diskusikan dengan temanmu secara klasikal.

Definisi 3.1

Sistem persamaan linear adalah himpunan beberapa persamaan linear yang saling terkait, dengan koefisien-koefisien persamaan adalah bilangan real.

Sistem persamaan linear dua variabel merupakan sistem persaman linear. Berikut ini, didefinisikan sistem persamaan linear dua variabel.

Definisi 3.2

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah suatu sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \text{..(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \text{..(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya 0; a_2 dan b_2 tidak keduanya 0.

x, y : variabel
a_1, a_2 : koefisien variabel x
b_1, b_2 : koefisien variabel y
c_1, c_2 : konstanta persamaan

Diskusi

Ujilah pemahamanmu. Diskusikan permasalahan di bawah ini dengan kelompokmu.

1. Diberikan dua persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ dan $2x + 3y = 2$. Apakah kedua persamaan ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel?
2. Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Apakah kedua persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel?

Contoh 3.1

Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Kedua persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab kedua persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $x + 0y = 3$ dan $0x + y = -2$ dan pemaknaan setiap variabel pada kedua persamaan adalah sama.

Untuk lebih mendalami sistem persamaan linier, cermatilah masalah berikut.

Masalah-3.3

Buktikan bahwa untuk setiap n, $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ tidak dapat disederhanakan.

Petunjuk:

Cobalah berdiskusi dengan temanmu untuk membuktikan pernyataan tersebut! Untuk membuktikan kebenaran pernyataan tersebut, perlu kamu memahami makna sebuah pecahan tidak dapat disederhanakan. Apa kaitan masalah tersebut dengan faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan. Di dalam proses pembuktiannya kamu menemukan keterkaitannya dengan materi sistem persamaan linear dua variabel.

Alternatif Penyelesaian

Selanjutnya perhatikan kedua sistem persamaan linear dua variabel berikut.

1. Diberikan $2x + 3y = 0$ dan $4x + 6y = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian, misalnya, (3, –2), (–3, 2) dan termasuk (0,0). Di samping itu, kedua persamaan memiliki suku konstan adalah nol dan grafik kedua persamaan berimpit. Apabila sebuah SPLDV mempunyai penyelesaian tidak semuanya nol dikatakan memiliki penyelesaian yang *tak trivial*.
2. Diberikan $3x + 5y = 0$ dan $2x + 7y = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan adalah nol dan mempunyai penyelesaian tunggal; yaitu, untuk $x = 0$, $y = 0$. Apabila sebuah SPLDV hanya memiliki penyelesaian $x = 0$ dan $y = 0$ disebut *penyelesaian trivial*.

Kedua sistem persamaan linear di atas adalah sistem persamaan linear yang homogen.

Definisi 3.3

Sistem persamaan linear homogen merupakan sistem persamaan linear dengan suku konstan sama dengan nol dan memenuhi salah satu dari dua hal berikut:

1. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
2. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.

Untuk mendalami pemahaman kamu, mari cermati contoh berikut.

Contoh 3.2

Untuk nilai σ apakah sistem persamaan

$$\left.\begin{aligned}(\sigma-3)x+y&=0\\ x+(\sigma-3)y&=0\end{aligned}\right\}$$

mempunyai penyelesaian yang tak trivial?

Penyelesaian

$(\sigma - 3)\,x + y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -(\sigma - 3)\,x$.

Kita subtitusikan persamaan $y = -(\sigma - 3)\,x$ ke persamaan $x + (\sigma - 3)\,y = 0$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + (\sigma - 3)(-\sigma + 3)\,x = 0 \;&\Rightarrow\; x + (-\sigma^2 + 6\sigma - 9)\,x = 0\\ &\Rightarrow\; x = (\sigma^2 - 6\sigma + 9)\,x \end{aligned}$$

Agar mempunyai penyelesaian tak trivial, maka $x \neq 0$. Sehingga diperoleh

$$(\sigma^2 - 6\sigma + 9) = 1 \Rightarrow \sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (\sigma - 4)(\sigma - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \sigma = 4 \text{ atau } \sigma = 2$$

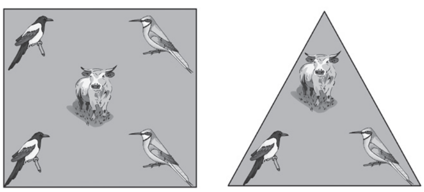
- Ingat makna $a \times b = 0$

Agar sistem persamaan $(\sigma - 3)\,x + y = 0$ dan $x + (\sigma - 3\,y = 0$ mempunyai penyelesaian yang tak trivial, pastilah $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$.

- Coba uji nilai $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$ ke dalam persamaan. Apakah benar sistem tersebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.

Uji Kompetensi 3.1

1. Angga anak Pak Purwoko memiliki setumpuk kartu. Keseluruhan kartu dapat dipilah menjadi dua bagian menurut bentuknya. Satu jenis berbentuk persegi yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan empat ekor burung. Satu jenis lagi berbentuk segitiga yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan dua ekor burung. Lihat gambar berikut!



   Berapa banyak kartu persegi dan segitiga yang harus diambil dari tumpukan kartu agar jumlah gambar kerbau 33 dan jumlah gambar burung 100.

2. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $xy + 5z = 4, y \in R$ dan $2x - 3z = 3$.
   b. $x - 3 = 0$ dan $y - 5 = 1$.

3. Jelaskan mengapa penyelesaian sebuah sistem persamaan linear (SPL) adalah salah satu dari tiga kemungkinan berikut: tidak punya penyelesaian, atau memiliki tepat satu penyelesaian atau memiliki tak berhingga penyelesaian!

SOAL TANTANGAN

4. Sebuah perahu yang bergerak searah arus sungai dapat menempuh jarak 46km dalam 2 jam. Jika perahu tersebut bergerak berlawanan dengan arah arus sungai dapat menempuh jarak 51 km dalam 3 jam. Berapa kecepatan perahu dan kecepatan aliran air sungai?

Projek

Cari sebuah SPLDV yang menyatakan pemodelan nyata yang kamu jumpai di lingkungan sekitarmu. Uraikan deskripsi pemodelan tersebut dan langkah-langkah yang kamu ambil untuk dapat menyatakan pemodelan tersebut dalam SPLDV. Kemudian SPLDV yang kamu peroleh diinterpretasikan hasilnya. Buat dalam bentuk laporan dan paparkan di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Tiga Variabel

Konsep persamaan linear dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu temukan dari masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budayamu. Dengan cara yang analog kita akan menemukan konsep sistem persamaan linear tiga variabel melalui penyelesaian masalah-masalah nyata. Perbedaan sistem persamaan linear dua variabel dengan sistem persamaan linear tiga variabel terletak pada banyak variabel yang akan ditentukan nilainya. Sekarang cermati beberapa masalah yang diajukan.

Nenek moyang kita memiliki keahlian seni ukir (seni pahat). Mereka dapat membuat berbagai jenis patung, ornamen-ornamen yang memiliki nilai estetika yang cukup tinggi. Pak Wayan memiliki keterampilan memahat patung yang diwarisi dari Kakeknya. Dalam melakukan pekerjaannya, ia dibantu dua anaknya; yaitu Gede dan Putu yang sedang duduk di bangku sekolah SMK Jurusan Teknik Bangunan.

Gambar 3.4 Ukiran patung dan ornamen

Masalah-3.4

Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 bulan. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan keempat jenis ukiran di atas dalam waktu 7 bulan. Jika Pak Wayan bekerja bersama Gede, mereka dapat menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 bulan. Karena Putu dan Gede bekerja setelah pulang sekolah, mereka berdua membutuhkan waktu 8 bulan untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan, sesuai batas waktu yang diberikan?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah, manfaatkan pengetahuan dan keterampilan yang sudah kamu miliki untuk menemukan aturan, hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui. Dalam menyelesaikan masalah di atas, langkah penyelesaiannya tersirat dalam beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kamu menentukan kecepatan Pak Wayan, Putu, dan Gede bekerja menyelesaikan satu unit pesanan ukiran tersebut?
2) Dapatkah kamu menentukan hubungan tiap-tiap kecepatan untuk menyelesaikan pekerjaan dalam bentuk persamaan?
3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah kaitannya dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?
4) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?.
5) Bagaimana hubungan antara konsep jarak dan kecepatan dalam menentukan lamanya waktu yang digunakan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan?
6) Adakah jawaban permasalahan yang kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Pesanan pembuatan ukiran patung dan ornamen rumah dengan batas waktu 5 bulan.

Waktu yang dibutuhkan membuat patung dan ornamen:

Pak Wayan dan Putu adalah 7 bulan

Pak Wayan dan Gede adalah 6 bulan

Putu dan Gede adalah 8 bulan

Ditanya: Waktu yang diperlukan bila ketiganya bekerja bersama-sama.

Misalkan: Waktu yang dibutuhkan (bulan) Pak Wayan adalah x

Waktu yang dibutuhkan (bulan) Putu adalah y

Waktu yang dibutuhkan (bulan) Gede adalah z

Berarti pekerjaan yang dapat diselesaikan Pak Wayan, Putu, dan Gede dengan waktu x, y, dan z, masing-masing $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$ bagian pekerjaan.

- Bila Pak Wayan dan Putu bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Putu membutuhkan 7 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
  $7\frac{1}{x}+7\frac{1}{y}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$ .... (Persamaan-1)
- Bila Pak Wayan dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Gede membutuhkan 6 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
  $6\frac{1}{x}+6\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$ .... (Persamaan-2)
- Bila Putu dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Putu dan Gede membutuhkan 8 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
  $8\frac{1}{y}+8\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8}$ .... (Persamaan-3)

- Temukan tiga persamaan linear yang saling terkait dari persamaan-1, 2, dan 3 di atas!
- Miasalkan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.
- Tentukan nilai p, q, dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya! Sebagai alternatif pilihan adalah metode campuran eliminasi dan subtitusi.

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-1 dan 2 diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|} 7p + 7q = 1 & \times 6 \\ 6p + 6r = 1 & \times 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 42p + 42q = 6 \\ 42p + 42r = 7 \quad - \\ \hline 42q - 42r = -1 \end{array}$$

$\therefore\ 42q - 42r = -1$ .... (Persamaan-4)

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-3 dan 4 diperoleh

$$\begin{array}{l|l|} 8q + 8r = 1 & \times 42 \\ 42q - 42r = -1 & \times 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 336q + 336r = 42 \\ 336q - 336r = -8 \quad - \\ \hline 672r = 50 \end{array}$$

Dari 672 $r = 50$ diperoleh $r = \dfrac{50}{672}$

$r = \dfrac{50}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $8q + 8r = 1$ diperoleh $q = \dfrac{34}{672}$

$q = \dfrac{34}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $7p + 7q = 1$ diperoleh $p = \dfrac{62}{672}$

Sebelumnya telah kita misalkan

$$p = \frac{1}{x} \text{ dan } p = \frac{62}{672} \Rightarrow x = \frac{672}{62} = 10{,}8$$

$$q = \frac{1}{y} \text{ dan } q = \frac{34}{672} \Rightarrow y = \frac{672}{34} = 19{,}76$$

$$r = \frac{1}{z} \text{ dan } r = \frac{50}{672} \Rightarrow z = \frac{672}{50} = 13{,}44$$

Karena x, y, dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu dan Gede menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 bulan, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 bulan, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 bulan.

Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$t = \frac{1}{\left(\dfrac{62}{672} + \dfrac{34}{672} + \dfrac{50}{672}\right)}$$

$$= \frac{672}{146}$$

$t = 4{,}6$ bulan

Karena waktu yang diberikan turis adalah 5 bulan, maka ternyata pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

Cermati masalah petani di daerah Toba berikut ini!

Mata pencaharian rakyat di Daerah Tapanuli pada umumnya adalah sebagai petani padi dan palawija, karyawan perkebunan sawit, karet, dan coklat, dan sebagai pedagang (khususnya yang tinggal di daerah wisata Danau Toba). Keterkaitan dan kebergunaan Matematika (khususnya materi sistem persamaan linear) untuk menyelesaikan masalah yang dialami para petani, karyawan, dan para pedagang dapat dicermati lebih jauh. Ketika kita menyelesaikan masalah-masalah tersebut menggunakan kerja matematika (coba-gagal, matematisasi, pemodelan masalah secara Matematika, melakukan abstraksi, idealisasi, dan generalisasi), kita temukan konsep dan aturan-aturan Matematika secara formal. Sekarang mari kita angkat sebuah permasalahan yang dihadapi para petani padi di Kecamatan Porsea di Kabupaten Toba Samosir. Permasalahannya terkait pemakaian pupuk yang harganya cukup mahal.

Masalah-3.5


Gambar 3.5: Pematang sawah Pak Panjaitan

Pak Panjaitan memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP} yang harus digunakan agar hasil panen padi lebih maksimal. Harga per karung setiap jenis pupuk adalah Rp75.000; Rp120.000,-; dan Rp150.000. Banyak pupuk yang dibutuhkan Pak Panjaitan sebanyak 40 karung. Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Panjaitan untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,-. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan.

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apa tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi. Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan untuk mencapai tujuan. Jika kamu mengalami kesulitan silahkan berdiskusi dengan teman atau bertanya kepada guru. Sebagai arahan/petunjuk pengerjaan masalah, ikuti pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Bagaimana kamu menggunakan variabel menyatakan banyak pupuk yang digunakan untuk setiap jenisnya dan hubungan pemakaian antar jenis pupuk?
2) Bagaimana kamu menggunakan variabel menyatakan hubungan harga setiap jenis pupuk dengan dana yang tesedia?
3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah terkait dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?

4) Apakah ada kesulitan yang harus kamu diskusikan dengan teman atau bertanya pada guru untuk menentukan hubungan antar variabel, melakukan manipulasi aljabar, kepastian strategi yang kamu pilih ?
5) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?
6) Berapa sak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan untuk setiap jenisnya? Masuk akalkah jawaban kamu?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

– Tiga jenis pupuk: Urea, SS, TSP. Harga per karung untuk setiap jenis pupuk Rp75.000,-; Rp120.000,-; dan Rp150.000,-.
– Banyak pupuk yang dibutuhkan 40 karung.
– Pemakaian pupuk Urea 2 kali lebih banyak dari pupuk SS.
– Dana yang tersedia Rp4.020.000,-.

Ditanya:

Berapa karung untuk tiap-tiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan?

Misalkan: x adalah banyak pupuk Urea yang dibutuhkan (karung)
y adalah banyak pupuk SS yang dibutuhkan (karung)
z adalah banyak pupuk TSP yang dibutuhkan (karung)

Berdasarkan informasi di atas diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ ………………………………………...... (Persamaan-1)
$x = 2y$ ……………………………………………….......... (Persamaan-2)
$75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000$ …................ (Persamaan-3)

- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-1, sehingga diperoleh
  $x = 2y$ dan $x + y + z = 40 \Rightarrow 2y + y + z = 40$
  $\therefore\ 3y + z = 40$ ……………………………………….. (Persamaan-4)

- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-3, sehingga diperoleh
  $x = 2y$ dan $75x + 120y + 150z = 4.020 \Rightarrow 150y + 120y + 150z = 4.020$
  $\Rightarrow 270y + 150z = 4.020$
  Sederhanakan persamaan sehingga diperoleh
  $\therefore\ 27y + 15z = 402$ …………………………....…… (Persamaan-5)

Untuk menentukan nilai y atau z, terapkan metode eliminasi terhadap Persamaan-4 dan Persamaan-5.

$$\begin{array}{l|l|} 3y + z = 40 & \times 15 \\ 27y + 15z = 402 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} 45y + 15z & = 600 \\ 27y + 15z & = 402 \quad - \\ \hline 18y & = 198 \end{array}$$

$18y = 198 \Rightarrow y = 11$

$y = 11$ dan $x = 2y \Rightarrow x = 22$

Dengan subtitusikan $x = 22$ dan $y = 11$ ke persamaan $x + y + z = 40$, diperoleh $z = 7$. Dengan demikian nilai $x = 22$, $y = 11$, dan $z = 7$. Dapat diinterpretasikan bahwa banyak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan dengan uang yang tersedia adalah 22 sak pupuk Urea, 11 sak pupuk SS, dan 7 sak pupuk TSP.

Ingat Kembali!

Pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah dipelajari sebelumnya dan mencermati kembali Persamaan-1, 2, dan 3 pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5. Temukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5!

- Dari penyelesaian Masalah 3.4 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ 6p + 6r = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \\ 8q + 8r = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$

- Dari penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ x = 2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \\ 75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$

- Tuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel secara individual dan mendiskusikan hasilnya dengan teman secara klasikal.

Definisi 3.4

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi:

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \text{.. (Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \text{.. (Persamaan-2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \text{.. (Persamaan-3)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3, $\in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0, dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

x, y, z : variabel
a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x
b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y
z_1, z_2, z_3 : koefisien variabel z
d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

♦ Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 3.3

Diberikan tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, $2p + 3q - r = 6$, dan $p + 3q = 3$. Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ bukan persamaan linear. Jika persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ diselesaikan diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

Contoh 3.4

Diberikan dua persamaan $x = -2$; $y = 5$; dan $2x - 3y - z = 8$. Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left.\begin{array}{l} x + 0y + 0z = -2 \\ 0x + y + 0z = 5 \\ 2x - 3y - z = 8 \end{array}\right\}$$

dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) berikut.

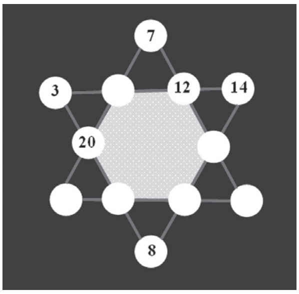
1. Diberikan *SPLTV* $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian; misalnya, (3,–2,0), (–3, 2,0) dan termasuk (0,0,0). Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila penyelesaian suatu *SPLTV* tidak semuanya nol, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
2. Diberikan *SPLTV* $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu *SPLTV* memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian trivial ($x = y = z = 0$).

Sebuah *SPLTV* dengan semua konstanta sama dengan nol disebut *SPLTV* homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka *SPLTV* tersebut tidak homogen. *SPLTV* yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu memiliki penyelesaian yang *trivial* atau memiliki banyak penyelesaian *nontrivial* selain satu penyelesaian *trivial*. Coba tuliskan definisi *SPLTV* yang homogen dan berikan contohnya, selain contoh di atas.

Uji Kompetensi 3.2

1. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $2x + 5y - 2z = 7$, $2x - 4y + 3z = 3$
   b. $x - 2y + 3z = 0$, $y = 1$, dan $x + 5z = 8$
2. Diberikan tiga buah persamaan
   $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 9$; $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$; dan
   $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$
   a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan!
   b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?
3. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat perlima dari panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan adalah 5 cm,

berapa panjang keseluruhan ikan tersebut?

4. 

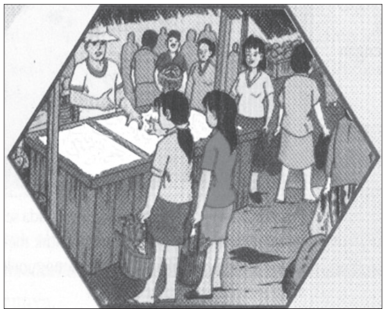
Isilah lingkaran kosong pada “bintang ajaib” dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama! Isilah lingkaran kosong pada “bintang ajaib” dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama!

5. Diberikan sistem persamaan linear berikut.
$x + y + z = 4$
$z = 2$
$(t^2 - 4)z = t - 2$
Berapakah nilai t agar sistem tersebut tidak memiliki penyelesaian, satu penyelesaian dan tak berhingga banyak penyelesaian?

6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$!

7. Diberikan dua persamaan sebagai berikut:
$$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$
Tentukan nilai dari $a^2 + b^2 - c^2$!

8. **SOAL TANTANGAN**



Seorang penjual beras, mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri dari 1 kg jenis A, 2 kg jenis B, dan 3 kg jenis C dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis A dan 3 kg jenis B dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri dari 1 kg jenis B dan 1 kg jenis C dijual dengan harga Rp 6250,00. Harga beras jenis mana yang paling mahal?

Projek

Cari sebuah *SPLTV* yang menyatakan permasalahan nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan permasalahan tersebut dan langkah-langkah yang kamu lakukan untuk menyatakan dalam *SPLTV*. Kemudian selesaikan *SPLTV* yang diperoleh dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan hasil kerja dan paparkan di depan kelas.

3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

a. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan linear Dua Variabel

Di kelas VIII SMP, kamu telah mempelajari berbagai metode menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*). Metode-metode tersebut antara lain: metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan campuran ketiga metode tersebut. Penggunaan yang lebih efektif dan efisien dari keempat metode tersebut dalam penyelesaian soal tergantung sistem persamaan linear yang diberikan, situasi masalah, dan waktu yang tersedia. Sekarang mari kita ulang kembali mempelajari metode-metode tersebut.

1) *Metode Grafik*

Berdasarkan Definisi 3.2, *SPLDV* terbentuk dari dua persamaan linear yang saling terkait. Sebelumnya kamu telah mengetahui bahwa grafik persamaan linear dua variabel berupa garis lurus. Pada langkah penyelesaian Masalah 3.1 telah diperoleh sistem persamaan linear dua variabel

$x + y = 2$ .... (Persamaan-1)

$4x + 2y = 7$ .... (Persamaan-2)

Bagaimana menggambar grafik (kurva) Persamaan-1 dan 2 di atas?
Langkah-langkah untuk menggambarkan grafik kedua persamaan linear tersebut tersirat dalam pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana strategi kamu untuk mendapatkan titik-titik yang dilalui grafik kedua persamaan linear tersebut?
2) Apakah kamu masih ingat apa yang dimaksud gradien suatu garis lurus?
3) Ada berapa kemungkinan posisi dua garis dalam satu sumbu koordinat. Mengapa hal itu terjadi, pikirkan apa alasan kamu, koordinasi pengetahuan dan keterampilan yang kamu miliki untuk mencari hubungan-hubungan kedua garis lurus tersebut?
4) Dapatkah kamu gambarkan kemungkinan posisi dua garis lurus tersebut dalam sumbu koordinat?
5) Untuk persamaan yang diberikan, bagaimana posisi kedua grafik persamaan tersebut? Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh. Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas.

- Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-1

	$x + y = 2$	
x	0	2
y	2	0

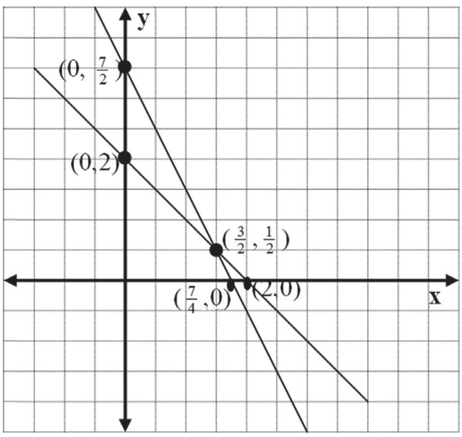
Diperoleh titik-titik potong kurva $x + y = 2$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik (0, 2) dan (2, 0).

- Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-2

	$4x + 2y = 7$	
x	0	$\frac{7}{4}$
y	$\frac{7}{2}$	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $4x + 2y = 7$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik $(0, \frac{7}{2})$ dan $(\frac{7}{4}, 0)$.

- Menarik garis lurus dari titik (0, 2) ke titik (2, 0) dan dari titik $(0, \frac{7}{2})$ ke titik $(\frac{7}{4}, 0)$.



Gambar 3.6 Grafik persamaan linear

Berdasarkan gambar grafik $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$, kedua garis lurus tersebut berpotongan pada sebuah titik, yaitu titik $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) *Metode Eliminasi*

Metode eliminasi yang kamu kenal di SMP sudah kita terapkan terhadap *SPLDV* $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ pada langkah penyelesaian Masalah-3.1.
Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\left.\begin{array}{l|l} x + y = 2 & \times 4 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ \underline{4x + 2y = 7\ -} \\ 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x + y = 2 & \times 2 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ \underline{4x + 2y = 7\ -} \\ -2x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut.

> Berdasarkan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel, bagaimana cara menentukan variabel sistem persamaan linear penyelesaiannya dengan metode eliminasi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$a_1x + b_1y = c_1$ .... (Persamaan-1)

$a_2x + b_2y = c_2$ .... (Persamaan-2)

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real, dan a_1, dan b_1 tidak keduanya nol; a_2, dan b_2 tidak keduanya nol.

Sebelum kamu menyelesaikan masalah ini, Apakah kamu memahami tujuan masalah dipecahkan? Bagaimana strategi kamu memanfaatkan pengetahuan yang telah kamu miliki? Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

1. Apa yang dimaksud mengeliminasi variabel x atau y dari Persamaan-1 dan 2 di atas?
2. Berapa kemungkinan melakukan eliminasi agar nilai x dan y diperoleh?
3. Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh? Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?
4. Strategi apa yang kamu gunakan untuk menguji bahwa himpunan penyelesaian yang kamu peroleh sudah benar?

3) *Metode Substitusi*

Himpunan penyelesaian *SPLDV* $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$. Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut dengan mengikuti langkah metode substitusi di atas.

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode substitusi?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \text{.. (Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \text{.. (Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 adalah bilangan-bilangan real, dan a_1, dan b_1 keduanya tidak nol; a_2, dan b_2 keduanya tidak nol.

Dari Persamaan-1 diperoleh

$a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_1 \neq 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$

$x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ subtitusi ke persamaan $a_2x + b_2y = c_2$ dan diperoleh

$$\Rightarrow a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{a_2b_1}{a_1}y + \frac{a_2c_1}{a_1} + \frac{a_1c_2}{a_1}y = \frac{a_2c_3}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1}y = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke persamaan $x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ dan diperoleh

$$x=-\frac{b_1\left(a_2c_1-a_1c_2\right)}{a_1\left(a_2b_1-a_1b_2\right)}+\frac{c_1}{a_1} \Rightarrow x=\frac{b_1\left(a_1c_2-a_2c_1\right)}{a_1\left(a_2b_1-a_1b_2\right)}+\frac{c_1\left(a_2b_1-a_1b_2\right)}{a_1\left(a_2b_1-a_1b_2\right)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\left(b_1c_2-b_2c_1\right)}{\left(a_2b_1-a_1b_2\right)}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian adalah $\left\{\left(\frac{\left(b_1c_2-b_2c_1\right)}{\left(a_2b_1-a_1b_2\right)},\frac{\left(a_2c_1-a_1c_2\right)}{\left(a_2b_1-a_1b_2\right)}\right)\right\}$.

4) *Metode Eliminasi dan Substitusi*

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x+b_2y=c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real, dan a_1, dan b_1 tidak keduanya nol; a_2, dan b_2 tidak keduanya nol.

Diskusi

Berdasarkan kedudukan kedua garis dalam satu sumbu kordinat, tentukan berapa kemungkinan penyelesaian suatu *SPLDV*. Diskusikan dengan temanmu. Beri contoh *SPLDV* untuk tiga kasus, gambarkan grafiknya dalam sumbu kordinat dan tentukan penyelesaiannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas!

b. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan linear Tiga Variabel

Perbedaan antara sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*) dengan sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) terletak pada banyak persamaan dan variabel yang digunakan. Sehingga penentuan himpunan penyelesaian *SPLTV* dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian *SPLDV*, kecuali dengan metode grafik. Cara lain yang dapat kamu gunakan selain metode eliminasi,

substitusi, dan campuran eliminasi substitusi (kamu coba sendiri) untuk menentukan penyelesaian *SPLTV* adalah cara determinan, menggunakan invers matriks yang akan kamu pelajari di kelas XII. Sekarang kita akan temukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode Sarrus.

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode Sarrus?

- Tentukan himpunan penyelesaian *SPLTV* secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan metode Sarrus.

Berdasarkan Definisi 3.4, bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, $d_3 \in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0 dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah-1: Eliminasi variabel x dari Persamaan-1 dan Persamaan-2

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times\, a_2 & \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \times\, a_1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-4)}$$

Langkah-2: Eliminasi variabel x dari Persamaan-1 dan Persamaan-3

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times\, a_3 & \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \times\, a_1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \quad - \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array}$$

$$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-5)}$$

Langkah-3: Eliminasi variabel y dari Persamaan-4 dan Persamaan-5

$$\begin{array}{l|l|} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 & \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 & \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada Persamaan-4 terhadap Persamaan-5 dan hasil perkalian koefisien variabel y pada Persamaan-5 terhadap Persamaan-4 maka diperoleh

$$z = \frac{\left(\left(a_2d_1 - a_1d_2\right)\left(a_3b_1 - a_1b_3\right) - \left(a_3d_1 - a_1d_3\right)\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)\right)}{\left(\left(a_2c - a_1c_2\right)\left(a_3b_1 - a_1b_3\right) - \left(a_3c_1 - a_1c_3\right)\left(a_2b - a_1b_2\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_1a_1b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2\right) - \left(a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_2b_1c_2\right) - \left(a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2\right) - \left(a_1b_2d_3 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1b_3c_1 - a_2b_3c_1 - a_2b_1c_2\right) - \left(a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_3b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3\right) - \left(a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1\right)\right)}{\left(\left(a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3\right) - \left(a_1b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_1\right)\right)}.$$

- Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui).

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x, y dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Petunjuk:
- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlah hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

Dengan menggunakan cara menentukan nilai z, ditentukan nilai x dan y dengan cara berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|} \qquad y = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk *x*, *y*, dan *z* di atas. Ketiga ciri-ciri tersebut mudah diingat. Sehingga memudahkan dalam mencari penyelesaian *SPLTV.* Sebelum metode Sarrus digunakan, *SPLTV* harus dibentuk dalam standar.

Pada langkah penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ ………………………………………….............. (Persamaan-1)

$x = 2y$ …………………………………………………..…............ (Persamaan-2)

$75 + 120y + 150z = 4.020$ ……………………….................... (Persamaan-3)

Ingat untuk menggunakan metode Sarrus semua variabel harus pada ruas kiri, dan semua konstanta berada pada ruas kanan. Untuk itu *SPLTV* di atas diubah menjadi

$x + y + z = 40$ ………………………………………….............. (Persamaan-1)

$x – 2y = 0$ …………………………………………………..….........(Persamaan-2)

$75 + 120y + 150z = 4.020$ ……………………….................... (Persamaan-3

Dengan menerapkan metode Sarrus pada *SPLTV* di atas, tentunya kamu dengan mudah memahami bahwa

$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 75$
$b_1 = 1$	$b_2 = –2$	$b_3 = 120$
$c_1 = 1$	$c_2 = 0$	$c_3 = 150$
$d_1 = 40$	$d_2 = 0$	$d_3 = 4020.$

Oleh karena itu, nilai *x*, *y*, dan *z* ditentukan sebagai berikut.

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc}40 & 1 & 1 & 40 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2\\ 4020 & 120 & 150 & 4020 & 120\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120\end{array}\right|}=\frac{(-8040+0+0)-(-12000+0+0)}{(-150+0+150)-(-300+0+120)}=\frac{3960}{180}=22$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 40 & 1 & 1 & 40\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 75 & 4020 & 150 & 75 & 4020\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120\end{array}\right|}=\frac{(0+0+6000)-(0+0+4020)}{180}=\frac{1980}{180}=11$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 40 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 75 & 120 & 4020 & 75 & 120\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120\end{array}\right|}=\frac{(-6000+0+4020)-(-8040+4800)}{180}=\frac{1260}{180}=7$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian *SPLTV* tersebut adalah *Hp* = {(22,11,7)}. Ternyata hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode eliminasi dan substitusi sebelumnya.

- Dengan memperhatikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada penyelesaian di atas, coba kamu tuliskan ciri-ciri suatu himpunan penyelesaian *SPL* dan hasilnya diskusikan secara klasikal.

Selanjutnya, dari semua penjelasan di atas, dapat kita tuliskan definisi himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut ini.

Definisi 3.5

Penyelesaian sistem persamaan linear adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.6

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua penyelesaian sistem persamaan linear.

Sedangkan untuk *SPLDV* dan *SPLTV*, himpunan penyelesain sistem persamaan linear tersebut, berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.8

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah himpunan semua triple terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 3.3

1. Tiga tukang cat, Joni, Deni, dan Ari, bekerja secara bersama-sama, dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang ini bekerja mengecat rumah serupa ini selama 4 jam kerja, setelah itu Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang, jika bekerja sendirian!
2. Sebuah bilangan terdiri dari atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih dari pada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut!
3. Sebuah pabrik memiliki 3 buah mesin A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja, 5.700 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B bekerja, 3.400 lensa yang dihasilkan dalam satu

minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, 4.200 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan oleh tiap-tiap mesin dalam satu minggu?

4. Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear berikut ini tanpa menggunakan cara aljabar, melainkan melalui metode grafik!

   i. $x - y = 3$
      $5x + 3y = 9$

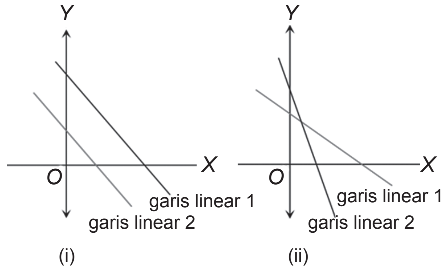
   ii. $2x - y = 0$
       $7x + 2y = 11$

   iii. $3x - 2y = 2$
        $-x + 5y = 21$

   iv. $4x - \frac{1}{2}y = 8$
       $12x + 7y = -4$

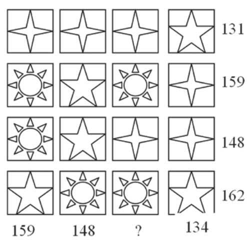
5. Kembali perhatikan sistem persamaan linear dua variabel,
   $a_1x + b_1y = c_1$
   $a_2x + b_2y = c_2$
   Mungkinkah sistem tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian? Jika ya, tentukan syaratnya dan gambarkan!

6. Perhatikan kedua grafik sistem persamaan linear di bawah ini!



   Gambar (i) dan (ii) merupakan grafik sistem persamaan linear dua variabel,
   $$a_1x + b_1y = c_1$$
   $$a_2x + b_2y = c_2$$
   a) Tentukan syarat yang dimiliki sistem supaya memiliki grafik seperti gambar (i) dan (ii)!
   b) Jelaskanlah perbedaan himpunan penyelesaian grafik (i) dan (ii)!

7. Diberikan sistem persamaan linear tiga variabel,
   $$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
   $$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
   $$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$
   Tentukan syarat yang dipenuhi sistem supaya memiliki solusi tunggal, memiliki banyak solusi, dan tidak memiliki solusi!

8.


Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti tanda tanya.

9. Diketahui $\frac{xy}{x+y} = a$. $\frac{xz}{x+z} = b$ dan $\frac{yz}{y+z} = c$, dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $c \neq 0$. Tentukan nilai $x = ...!$

10. Jika $a + b + c = 0$ dengan a, b, $c \neq 0$, maka tentukan nilai

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

$= ...!$

11. Nilai-nilai a, b, dan c memenuhi persamaan-persamaan berikut

$$\frac{25ab}{a+b} = \frac{1}{2}, \frac{15bc}{b+c} = -1, \text{ dan } \frac{5ac}{a+c} = -\frac{1}{3}.$$

Hitunglah $(a - b)^c$.

12.

Trisna bersama dengan Ayah dan Kakek sedang memanen tomat di ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna bersama kakeknya bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika Ayah dan kakek menyelesaikan pekerjaan itu, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, Ayah, dan Kakek untuk menyelesaikan panenan tersebut, jika mereka bekerja sendiri-sendiri?

13. Diberi dua bilangan. Bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Temukanlah bilangan tersebut.

14. Dengan menggunakan kertas berpetak, tentukanlah himpunan penyelesaian melalui grafik setiap sistem persamaan berikut ini!

i. $3x + 2y = 9$
$x + 3y = 10$

ii. $4x + y = 6$
$3x + 2y = 10$

4. Sistem Pertidaksamaan linear Dua Variabel

Masalah-3.11

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe *A* dan tipe *B* di atas sebidang tanah seluas 10.000m². Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun rumah tipe *A* dibutuhkan tanah seluas 100m² dan untuk membangun rumah tipe *B* dibutuhkan tanah seluas 75m². Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek Pak Rendi maka:

1) bantulah Pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun; dan
2) gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan-batasan yang telah diuraikan.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: x : banyak rumah tipe A yang akan dibangun
y : banyak rumah tipe B yang akan dibangun

1) Banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun
   a) Keterbatasan yang dimiliki Pak Rendi adalah:
      Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe A dan tipe B di atas tanah seluas 10.000m² ditentukan oleh pertidaksamaan:
      $100x + 75y \leq 10.000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:
      $4x + 3y \leq 400$ ....(1)
   b) Jumlah rumah yang akan dibangun, dibentuk oleh pertidaksamaan:
      $x + y \leq 125$.. (2)

   Dari kedua keterbatasan di atas (pertidaksamaan 1 dan pertidaksamaan 2), banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun, dihitung dengan menggunakan konsep sistem persamaan linear dua variabel seperti berikut.

$$\begin{array}{llcl} 4x + 3y = 400 & |\times 1| & \rightarrow & 4x + 3y = 400 \\ x + y = 125 & |\times 3| & \rightarrow & \underline{3x + 3y = 375} \; - \\ & & & x \quad = 25 \end{array}$$

untuk $x = 2$, maka $y = 125 - x$

$$y = 125 - 25$$
$$= 100$$

Hal ini berarti: dengan keterbatasan yang ada, Pak Rendi dapat membangun rumah tipe A sebanyak 25 unit, dan rumah tipe B sebanyak 100 unit.

Diskusi

Diskusikanlah dengan teman-temanmu, bagaimana caranya untuk mencari banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun selain yang sudah kita temukan di atas sesuai dengan keterbatasan yang ada.

2) Grafik daerah penyelesaian pada diagram kartesius

Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$, maka $x = 100$.
jika $x = 0$, maka $y = 133,3$.

Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik (0, 133,3) dan memotong sumbu y di titik (100, 0).
Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$ maka $x = 125$
jika $x = 0$ maka $y = 125$
Maka gari $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik (0,125) dan memotong sumbu x di titik (125, 0).

Langkah 2

Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$. Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika garis $4x + 3y = 400$ digambar pada diagram kartesius maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$. Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sebarang titik misal $P(x,y)$ pada salah satu daerah, kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar maka daerah yang

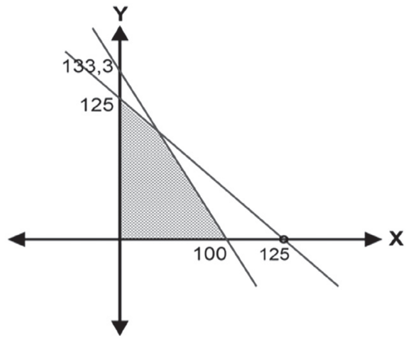
memuat titik $P(x,y)$ merupakan daerah penyelesaiannya, jika bernilai salah maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier.

Apakah kita perlu membatasi nilai $x > 0$ dan nilai $y > 0$? Mengapa? Berikan penjelasanmu.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.7 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linier

Dari Gambar 3.7, daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.

Mempelajari sistem pertidaksamaan linear dua variabel berguna untuk menentukan nilai maksimum suatu fungsi dengan domain suatu himpunan tertentu. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.5

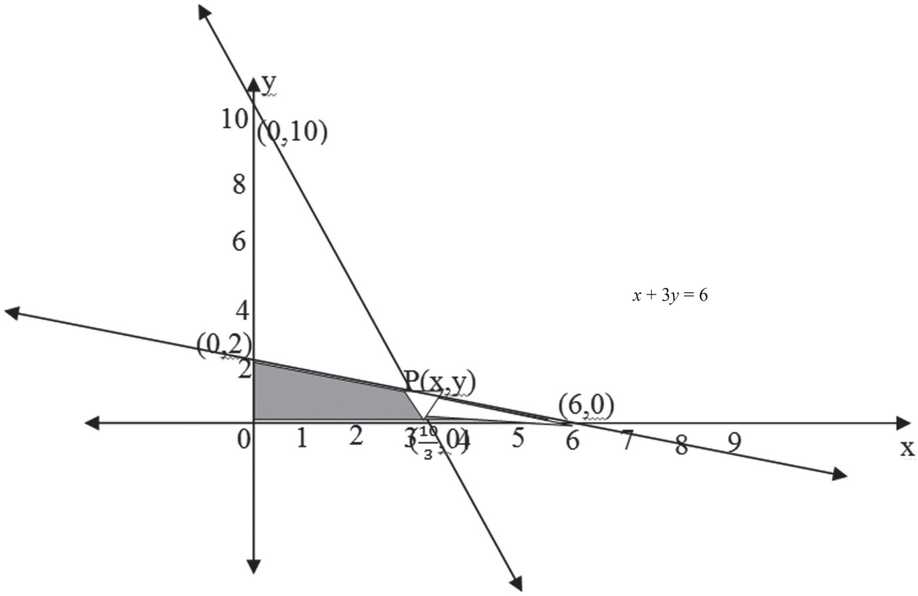
Jika nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ pada himpunan

$A = \{x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6{,}3\ x + y \leq a\}$ adalah 4, maka nilai $a = \ldots$?

Penyelesaian

Misalkan $f(x,y) = x + y$
Pertidaksamaan-1: $x + 3y \leq 6$
Pertidaksamaan-2: $3x + y \leq a$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.

- Coba gambarkan kedua pertidaksamaan di atas untuk menentukan titik potong grafik persamaan $x + 3y = 6$ dan $3x + y = a$ dan daerah fungsi f yang dibatasi kedua pertidaksamaan yang diketahui pada soal.



Gambar 3.8 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linear $x + 3y \leq 6$, $3x + y \leq a$

Mengingat gradien dari $f(x,y) = x + y$ adalah $m = -1$, maka f akan mencapai maksimum di titik P. Titik P adalah perpotongan dari garis $x + 3y = 6$ dan $3x + y = a$. Jadi diperoleh

$x_P = \dfrac{3a-6}{8}$ dan $y_P = \dfrac{18-a}{8}$.

Karena nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4, maka

$\dfrac{3a-6}{8} + \dfrac{18-a}{8} = 4 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10.$

Dengan demikian, agar nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4 maka nilai $a = 10$.
Berdasarkan masalah dan contoh di atas, mari kita tetapkan konsep sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut.

Definisi 3.9

1. Sistem pertidaksamaan linear adalah himpunan pertidaksamaan linear yang saling terkait dengan koefisien variabelnya bilangan-bilangan real.
2. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem pertidak-samaan linear yang memuat dua variabel dengan koefisien bilangan real.

Definisi 3.10

Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah himpunan semua pasangan titik (x,y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Definisi 3.11

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear adalah daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Uji Kompetensi 3.4

1. Diberikan sistem pertidaksamaan linier:
   $x - y \geq 3$
   $5x + 3y \geq 9$
   a) Gambarkan grafik pertidaksamaan pada sistem tersebut!
   b) Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem tersebut, dengan syarat tambahan $x > 0$ dan $y < 0$!
   c) Selanjutnya dapatkah kamu menentukan himpunan penyelesaian sistem tersebut untuk syarat $x < 0$ dan $y > 0$? Jelaskan!

2. Misalkan p adalah jumlah maksimum dari himpunan penyelesaian yang memenuhi sistem di bawah ini.
   $2x + 5y \leq 600$
   $4x + 3y \leq 530$
   $2x + y \leq 240$
   a) Gambarkanlah pertidaksamaan sistem linear tersebut!
   b) Tentukanlah nilai p!

3. Sekelompok tani transmigran mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Dalam suatu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lainnya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan petani

dari 1 kuintal padi adalah Rp 32.000 sedang dari 1 kuintal jagung Rp 20.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa ha tanah ditanami padi dan berapa ha tanah ditanami jagung?

3. Jika diberikan sistem pertidaksamaan linear seperti berikut ini,

   $a_1x + b_1y \geq c_1$ dan $x \geq 0$

   $a_2x + b_2y \geq c_2$ dan $y \geq 0$.

   a) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem memiliki solusi tunggal?

   b) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem tidak memiliki solusi?

4. Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Masing-masing memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 3.1. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara diratakan) minimum menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp 200 dan Fluon Rp 300 per kapsul, berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total?

Unsur	Perkapsul	
	Fluin	Fluin
Aspirin	2	1
Bikorbonat	5	8
Kodein	1	6

Projek

Bersama temanmu amati permasalahan di sekitarmu atau dari sumber lain (buku, internet, dan lain-lain) yang dapat dinyatakan dalam sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Formulasikan masalah tersebut dengan mendefinisikan variabel-variabel terkait, mencari persamaan atau pertidaksamaan yang menyatakan hubungan antar variabel tersebut, selesaikan sistem yang kamu peroleh, dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan atas kegiatanmu ini dan paparkan hasilnya di depan kelas.

D. PENUTUP

Berberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari seringkali menjadi sebuah model sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linier. Konsep sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan ini didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan dalam sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.
2. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah himpunan semua nilai variabel yang memenuhi sistem persamaan tersebut.
3. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstantanya adalah nol dan salah satu dari dua hal berikut dipenuhi.
   a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
   b. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyaknya anggota himpunan penyelesaian yang tak trivial sebagai tambahan penyelesaian trivial.
4. Apabila penyelesaian sebuah sistem persamaan linear semuanya nilai variabelnya adalah nol, maka penyelesaian tersebut dikatakan penyelesaian trivial. Misal diberikan sistem persamaan linear $3x + 5y + z = 0$ dan $2x + 7y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstanta adalah nol dan mempunyai penyelesaian yang tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$.
5. Apabila sebuah sistem persamaan linear mempunyai anggota himpunan penyelesaiannya dari nilai variabel yang tidak semuanya nol disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
6. Secara tafsiran geometri dari selesaian suatu sistem persamaan linear, diberikan sistem persamaan dengan 2 persamaan dan 2 variabel, sebagai berikut.
   $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$, dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 anggota bilangan real, dengan a_1 dan a_2 tidak keduianya nol dan b_1 dan b_2 tidak keduanya nol.
   Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis, misal garis g_1 dan garis g_2. Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan tersebut, maka penyelesaian sistem persamaan linear tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis g_1 dan garis g_2. Berdasarkan hal itu, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu
   (a) garis g_1 dan garis g_2 sejajar dan tidak berpotongan, yaitu jika tidak terdapat titik perpotongan sehingga sistem tidak mempunyai penyelesaian.

(b) garis g_1 dan garis g_2 berpotongan pada satu titik, sehingga sistem hanya mempunyai tepat satu (tunggal) penyelesaian.

(c) garis g_1 dan garis g_2 berimpit, artinya terdapat tak terhingga banyak titik perpotongan. Dalam hal ini sistem mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

7. Sistem Persamaan linear (*SPL*) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai selesaian, mempunyai satu selesaian dan mempunyai tak terhingga banyak selesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan dan pertidaksamaan linear adalah prasyarat mutlak mempelajari bahasan matriks dan program linear. Matriks adalah bentuk lain sebuah sistem persamaan linear, artinya setiap sistem persamaan linear dapat disajikan dalam bentuk matriks. Kita akan menemukan konsep dan sifat-sifat matriks melalui penyelesaian masalah nyata. Selanjutnya kita lakukan operasi hitung pada dua atau lebih matriks dan menentukan determinannya. Sifat-sifat matriks terhadap operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.